MONOTRIQUES

MONOTRIQUE = Monotal métrique

LONGUEUR d'un monotrique FINI

= SOMME des distances de ses ▽paires de points successifs ▲

LONGUEUR d'un monotrique

Suprémum de l'ensemble des longueurs de ses ▽sousmonotriques ▲-finis

RECTIFIABLE

= de longueur FINIE

= dont la longueur appartient à $\mathbb{R}^+$

▲ La longueur du monotrique M est notée long M

- la longueur de tout monotrique singleton est nulle ■

- si $M = \{m_0, \dots, m_{n-1}\}$ est un monotrique fini de distance d et tel que

$$m_0 < m_1 < \cdots < m_{n-1}$$

pour l'un de ses ordres

ALORS $\text{long } M = d(m_0\, m_1) + \cdots + d(m_{n-2}\, m_{n-1})$

■

Tout monotrique fini est rectifiable ■
Toute partie de monotal s'érige naturellement en monotal ■ ▼et prend le nom de SOUS-MONOTAL du monotal donné ▲

Toute partie d'espace métrique s'érige naturellement en espace métrique ■ ▼et prend le nom de SOUS-ESPACE METRIQUE de l'espace métrique donné ▲

Toute partie de monotrique s'érige naturellement en monotrique ▼et prend le nom de SOUS-MONOTRIQUE du monotrique donné ▲

Tout arc est monotal

Tout arc métrique est monotrique

Tout arc sous-espace d'un métrique est monotrique

Tout demi-cercle euclidien est monotrique

Tout quart de cercle euclidien est monotrique

Tout épointé de cercle euclidien est monotrique

Tout épointé de cycle, sous-espace d'un métrique, est monotrique.

Tout cercle ordonné est monotrique

Tout cycle ordonné, sous-espace de métrique, est monotrique.

$$P \subset M$$

$$\text{long } P = \sup \{ \text{long } F \mid F \in \mathcal{P}_{\text{fin}} P \}$$

$$\text{long } M = \sup \{ \text{long } G \mid G \in \mathcal{P}_{\text{fin}} M \}$$

$$F \in \mathcal{P}_{\text{fin}} P \Rightarrow F \in \mathcal{P}_{\text{fin}} M.$$

$$\text{long } F \in \{ \text{long } G \mid G \in \mathcal{P}_{\text{fin}} M \}.$$

$$\{ \text{long } F \mid F \in \mathcal{P}_{\text{fin}} P \} \subset \{ \text{long } G \mid G \in \mathcal{P}_{\text{fin}} M \}$$

$\square$. $\qquad \underline{A \subset B} \Rightarrow \sup A \leqslant \sup B.$

$$\sup \{ \text{long } F \mid F \in \mathcal{P}_{\text{fin}} P \} \leqslant \sup \{ \text{long } G \mid G \in \mathcal{P}_{\text{fin}} M \}$$

$$\text{long } P \leqslant \text{long } M.$$

Pour toute partie P du monotique M

$$\text{long } P \leqslant \text{long } M$$

Tout sous-monotique d'un monotique rectifiable est lui-même rectifiable ■

Pour toutes parties A, B d'un monotique :

$$\text{long } A \leqslant \text{long}(A \cup B)$$

Pour toute partie P et tout point m d'un monotique

$$\text{long } P \leqslant \text{long}(P \cup \{m\})$$

Pour toute partie P et tout point m d'un monotique il existe une partie comprenant m et dont la longueur est au moins égale à celle de P

Autrement dit $\mathcal{Z}$

Pour tout point m d'un monotique la longueur de tout sous-monotique est $\mathcal{Z}$ majorée par celle d'un sous-monotique comprenant m ■

Pour tout point m d'un monotique
la longueur de tout sous-monotique fini est majorée par celle d'un sous-monotique fini comprenant m ■

Pour tout point m d'un monotique M

$$\text{long } M = \sup \{ \text{long } F \mid m \in F \in \mathcal{P}_f M \}$$

* $\forall P \in \mathcal{P}_{fin} M \quad \text{long } P \leqslant \text{long}(P \cup \{m\}) = \text{long}(P')$

où $m \in P' \in \mathcal{P}_{fin} M$

$$\text{long} M = \sup_{P \in \mathcal{P}_{fin} M} \text{long } P = \sup \text{long } P' = \sup_{\substack{F \in \mathcal{P}_{fin} M \\ m \in F}} \text{long } F$$

Si $d_1 \leqslant d_2$

Alors $\forall x, y \in M \quad d_1(x,y) \leqslant d_2(x,y)$

Si F sous-monotique fini de M

$F = \{m_1, \dots, m_n\}$

$$\begin{aligned} \mathrm{long}_1 F &= d_1(m_1, m_2) + \dots + d_1(m_{n-1}, m_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} d_2(m_i, m_{i+1}) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} d_2(m_i, m_{i+1}) = \mathrm{long}_2 F \end{aligned}$$

$$\sup\{\mathrm{long}_1 F \mid F \in \mathcal{P}_{fin} M\} \leqslant \sup\{\mathrm{long}_2 F \mid F \in \mathcal{P}_{fin} M\}$$

$$\mathrm{long}_1 M \leqslant \mathrm{long}_2 M$$

$\boxed{d_1 \leqslant d_2}$

Monotiques

M, d_1		M, d_2
long M	$\leqslant$	long M
rectifiable	$\Leftarrow$	rectifiable

$a_1 \in \mathbb{R}^+$ — $a_1 d_1 \leqslant a_2 d_2$ — $a_2 \in \mathbb{R}^+$

Monotiques

M, d_1		M, d_2
long M	$\leqslant$	$\frac{a_2}{a_1}$ long M
rectifiable	$\Leftarrow$	rectifiable.

$a \in \mathbb{R}_0^+$ — $a\, d_2 \leqslant d_1 \leqslant b\, d_2$ — $b \in \mathbb{R}_0^+$

Monotriques

M, d_1		M, d_2
long M	$\leqslant$	b long M
long M	$\geqslant$	a long M
rectifiable	$\Longleftrightarrow$	rectifiable.

Pour tout arc ou tout cycle ordonné de $\mathbb{R}^2$

RECTIFIABLE $=$ ▽ TAXI RECTIFIABLE ▲

tax $d < t < \sqrt{2}\, d$

Si l'arc A est sous-espace du métrique E, d
et i un auto de E, d

Alors $\text{long } iA = \text{long } A$

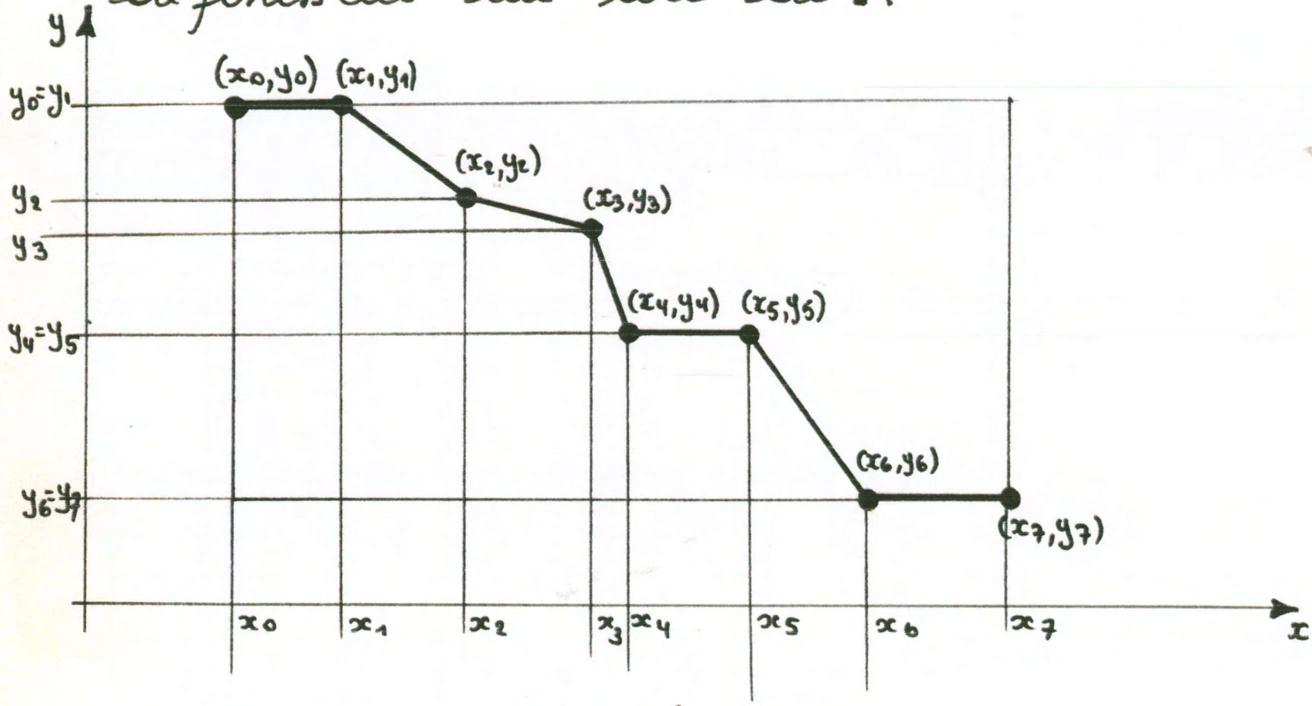
Si l'arc A est sous-espace du plan euclidien
et s une similitude de rapport k

Alors $\text{long } sA = k \text{ long } A$

des suites monotones de réels

$x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$
$y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$

définissent un arc de $\mathbb{R}^2$



rectifiable de "taxi longueur"

$$|x_0 - x_{n-1}| + |y_0 - y_{n-1}|$$

Si f est une fonction monotone de $[a\,b]$ dans $\mathbb{R}$

Alors $\forall\, x, y \in [a\,b]$

$$x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \quad \text{(cas croissant)}$$

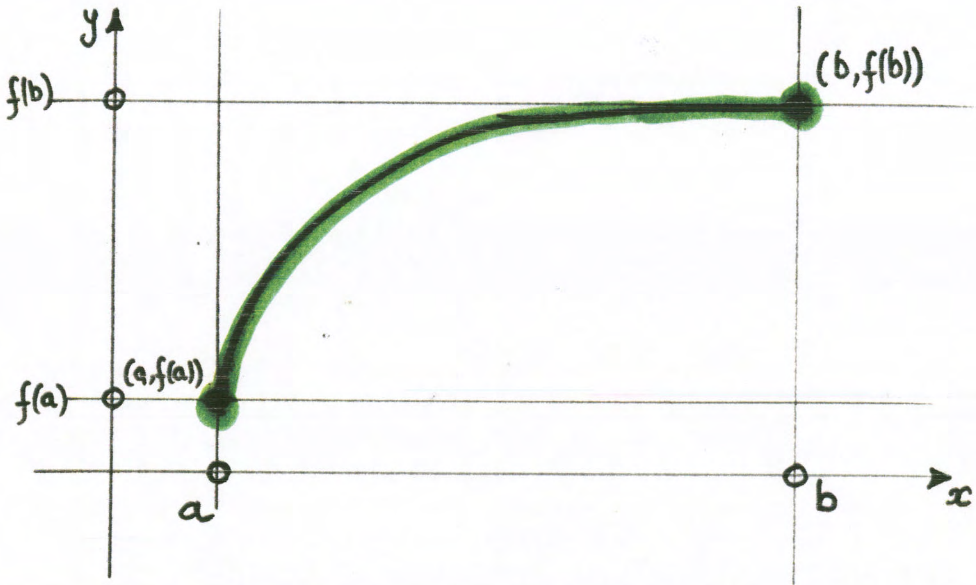
et Pour toute suite finie de (x_i, y_i) de $[a\,b] \times [f(a)\,f(b)]$
avec $x_0 = a$ $y_0 = f(a)$ $x_{n-1} = b$ $y_{n-1} = f(b)$

$$\text{long}\,\{(x_0,y_0),\dots,(x_{n-1},y_{n-1})\} \leqslant |x_0 - x_{n-1}| + |y_0 - y_{n-1}|$$

$$\leqslant |a-b| + |f(a) - f(b)|$$

d'où

$$\text{long}\, f \leqslant |a-b| + |f(a) - f(b)|$$



Toute fonction monotone $[a\,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est rectifiable
de vraie longueur $|a-b| + |f(a) - f(b)|$

Dans $\mathbf{R}^2$

sauf mention expresse du contraire
distance, longueur, rectifiabilité
sont toujours relatives à la
distance euclidienne.

Toute fonction monotone $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ est rectifiable
et de longueur $\leqslant |a-b| + |f(a) - f(b)|$

Sont rectifiables

$f: [0\ 1] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto x$ de longueur $\leqslant 1+1 = 2$

$f: [0\ 1] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto 3x$ de longueur $\leqslant 1+3 = 4$

$f: [0\ 1] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto x+r$ de longueur $\leqslant 1+r+1 = r+2$

$f: [0\ 1] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto x^2$ de longueur $\leqslant 1+1 = 2$

$f: [0\ 1] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto x^n$ de longueur $\leqslant 1+1 = 2$

$f: [1\ 2] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto \frac{1}{x}$ de longueur $\leqslant |2-1| + |1-\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}$

$f: [0\ \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto \sin x$ de longueur $\leqslant \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi+2}{2}$

$f: [0\ \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto \cos x$ de longueur $\leqslant \frac{\pi}{2} + 1 = \frac{\pi+2}{2}$

$f: [0\ 2] \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto [x]$ de longueur $\leqslant 2+2 = 4$

Dans le monotrique $M, \leqslant, \tilde{d}$:

$$\operatorname{long}_{\tilde{d}} [ab] = \tilde{d}(a,b)$$

RECTIFICATION

$M, \leqslant, \tilde{d}$ est le monotrique RECTIFIÉ du monotrique rectifiable $M, \leqslant, d$

Si $f : M, d \longrightarrow N, \delta$

bijection monotone isométrique de monotriques

Alors $\operatorname{long} M = \operatorname{long} N$

M rectifiable $\Leftrightarrow$ N rectifiable

$f : M, \tilde{d} \longrightarrow N, \tilde{\delta}$ est

bijection monotone isométrique

□ Si l'arc A est sous-espace du métrique E, d

et i un auto de E, d

Alors $\operatorname{long} A = \operatorname{long} iA$

✻ i est isométrie bijective $E, d \to E, d$

i est homéo $E, \mathcal{T}_d \to E, \mathcal{T}_d$

i est homéo $A \to iA$

iA est arc

$i : A \to iA$ est monotone

$i : A \to iA$ est monotone isométrique ■

$r \in \mathbb{R}_0^+$

Monotriques

M, d		M, rd
$r \cdot \operatorname{long} M$	$=$	$\operatorname{long} M$
$r \cdot \tilde{d}$	$=$	$\widetilde{rd}$
rectifiable	$\Leftrightarrow$	rectifiable

□ Si l'arc A est sous-espace du plan euclidien et s une similitude de rapport r

Alors $|r| \cdot \operatorname{long} A = \operatorname{long} sA$ ■

$\boxed{d_1 \leqslant d_2}$

Monotriques

M, d_1		M, d_2
$\operatorname{long} M$	$\leqslant$	$\operatorname{long} M$
$\tilde{d}_1$	$\leqslant$	$\tilde{d}_2$
rectifiable	$\Leftarrow$	rectifiable

$a_1 \in \mathbb{R}_0^+$ $\boxed{a_1 d_1 \leqslant a_2 d_2}$ $a_2 \in \mathbb{R}_0^+$

Monotriques

M, d_1		M, d_2
$a_1 \operatorname{long} M$	$\leqslant$	$a_2 \operatorname{long} M$
$a_1 \tilde{d}_1$	$\leqslant$	$a_2 \tilde{d}_2$
rectifiable	$\Leftarrow$	rectifiable

$a \in \mathbb{R}_0^+$ — $\boxed{a d_2 \leqslant d_1 \leqslant b d_2}$ — $b \in \mathbb{R}_0^+$

Monotriques

M, d_1		M, d_2
long M	$\leqslant$	b long M
long M	$\geqslant$	a long M
	$a\tilde{d}_2 \leqslant \tilde{d}_1 \leqslant b\tilde{d}_2$	
rectifiable	$\Longleftrightarrow$	rectifiable

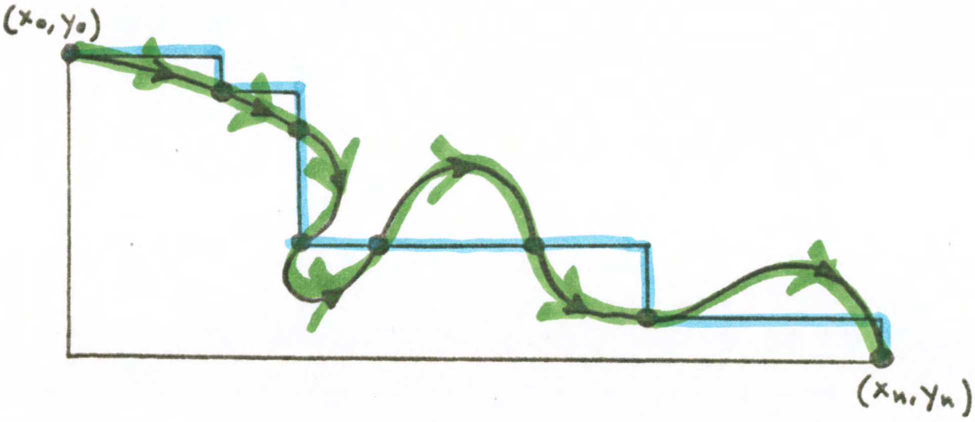
Pour tout monotal dans $\mathbb{R}^2$

$$^{\triangledown}\text{EUCLIRECTIFIABLE}_{\blacktriangle} = {}^{\triangledown}\text{TAXIRECTIFIABLE}_{\blacktriangle}$$

L'encadré précédent est valable en particulier pour les arcs et les cycles ordonnés de $\mathbb{R}^2$.

Les suites monotones de réels $x_0, x_1, \dots, x_n$
$y_0, y_1, \dots, y_m$

définissent un monotal fini dans $\mathbb{R}^2$



TAXIRECTIFIABLE
de TAXILONGUEUR égale à la taxidistance de ses extrémités :

$$|x_0 - x_n| + |y_0 - y_m|$$

$\vdash$ EUCLIRECTIFIABLE
et d'EUCLILONGUEUR $\leqslant |x_0 - x_n| + |y_0 - y_n|$

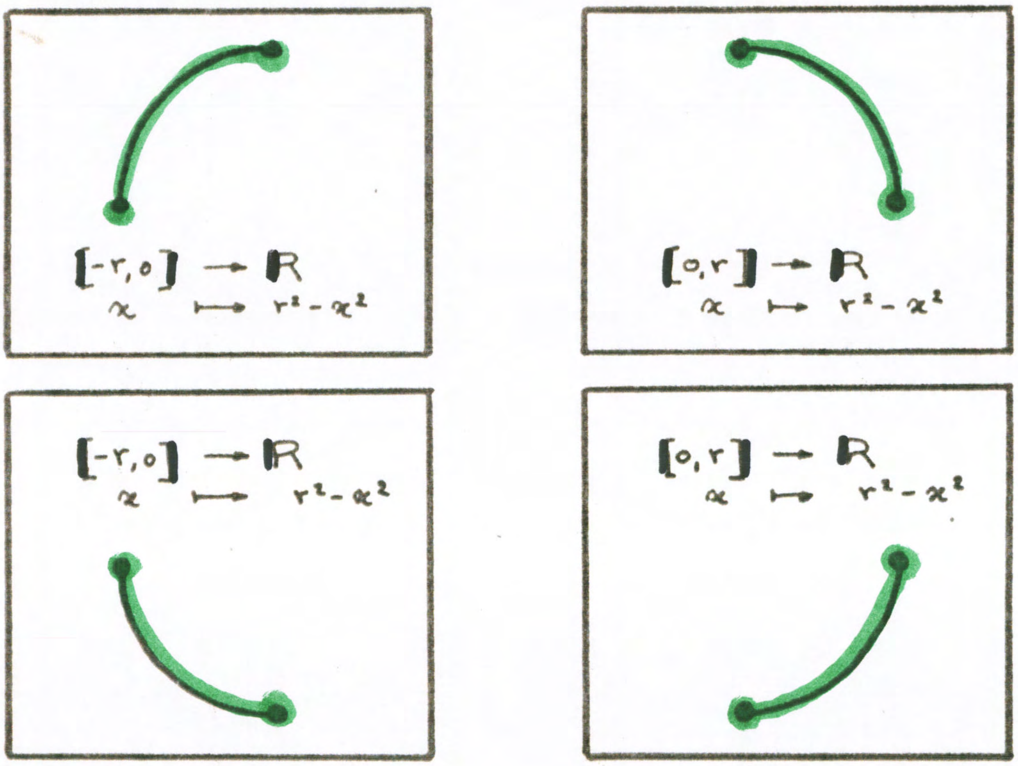
□ Toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est taxirectifiable de taxilongueur $|a-b| + |fa - fb|$ ■

Dans $\mathbf{R}^2$

2 sauf mention expresse du contraire distance, longueur, rectifiabilité sont toujours relatives à la distance euclidienne.

□ Toute fonction monotone $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ est rectifiable de longueur $\leqslant |a-b| + |fa - fb|$ ■

Les quarts de cercles euclidiens de rayon r



sont rectifiables et de taxilongueur $2r$

$\vdash$ sont encore rectifiables :

Si A et B sont des parties du monotrique M telles que

$A \cup B = M$ $\quad$ $\operatorname{Max} A = \min B$ (pour l'un des ordres de M)

Alors $\operatorname{long} M = \operatorname{long} A \cup B = \operatorname{long} A + \operatorname{long} B$

- Si M fini Alors c'est trivial
- Si M infini

$m = \operatorname{Max} A = \min B$

On a $\operatorname{long} M = \sup \{\operatorname{long} F \mid m \in F \in \mathcal{P}_{fin} M\}$

or $\{F \mid m \in F \in \mathcal{P}_{fin} M\}$

$= \{G \cup H \mid m \in G \in \mathcal{P}_{fin} A$ et $m \in H \in \mathcal{P}_{fin} B\}$

$= \{G \cup H \mid G \in \mathcal{P}_{fin} A \quad H \in \mathcal{P}_{fin} B \quad \operatorname{Max} G = \min H\}$

d'où

$\operatorname{long} M = \sup \{\operatorname{long} F \mid m \in F \in \mathcal{P}_{fin} M\}$

$= \sup \{\operatorname{long} G \cup H \mid G \in \mathcal{P}_{fin} A \quad H \in \mathcal{P}_{fin} B \quad \operatorname{Max} G = \min H\}$

F, G, H sont FINIES !)

$= \sup \{\operatorname{long} G + \operatorname{long} H \mid G \in \mathcal{P}_{fin} A \quad H \in \mathcal{P}_{fin} B \quad \operatorname{Max} G = \min H\}$

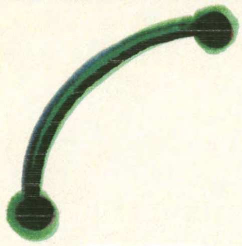
$= \sup(\{\operatorname{long} G \mid G \in \mathcal{P}_{fin} A \quad m \in G\} + \{\operatorname{long} H \mid H \in \mathcal{P}_{fin} B \quad m \in H\})$

en vertu du lemme

$= \sup \{\operatorname{long} G \mid m \in G \in \mathcal{P}_{fin} A\} + \sup \{\operatorname{long} H \mid m \in H \in \mathcal{P}_{fin} B\}$

$= \operatorname{long} A \qquad + \qquad \operatorname{long} B$

Les quarts de cercles euclidiens de rayon r



$[-r,0] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{r^2-x^2}$

$[0,r] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{r^2-x^2}$

$[-r,0] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\sqrt{r^2-x^2}$

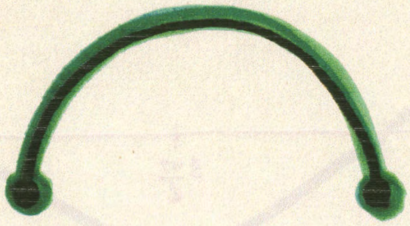
$[0,r] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -\sqrt{r^2-x^2}$

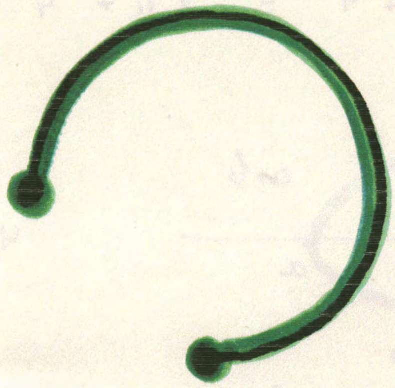
sont rectifiables et de taxe longueur $2r$.

Dès lors, sont encore rectifiables

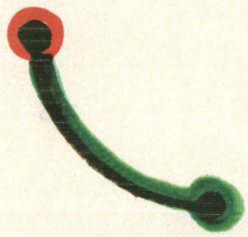
le demi cercle fermé



le trois-quart de cercle fermé



le quart de cercle fermé-ouvert



et finalement

le cercle ordonné

Un cercle euclidien ordonné de rayon non nul r est rectifiable et de longueur $< 8r$

Voici un cercle de rayon non nul r du plan euclidien

Sa taxi longueur est $8r$

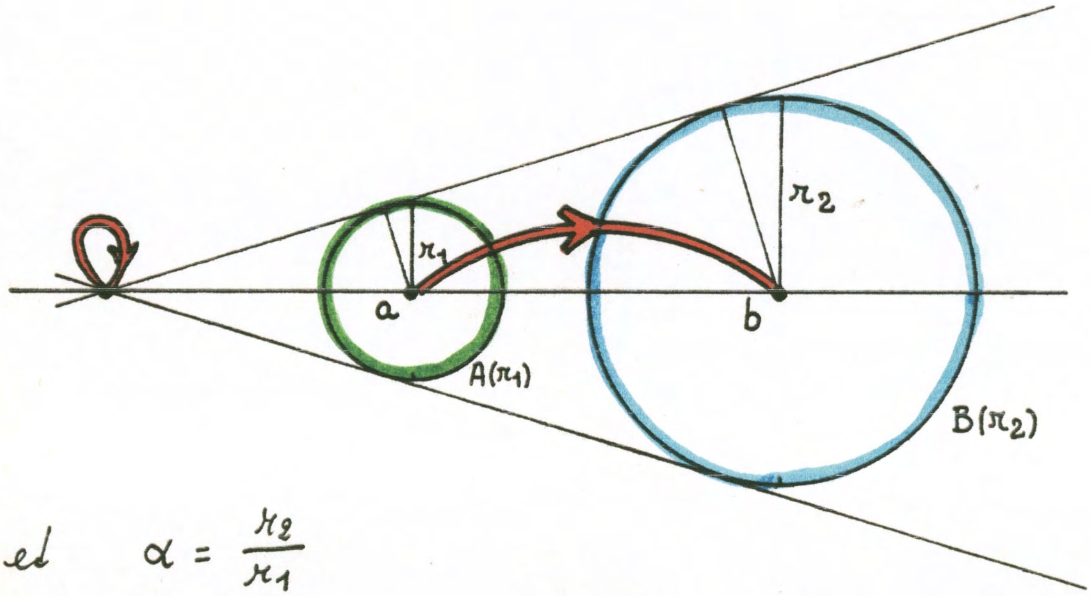
donc ce cercle est rectifiable de longueur

$$l(r)$$

avec $l(r) \leqslant 8r$

Tous les cercles de rayon non nul du plan euclidien sont semblables, en ce sens que si $A(r_1)$ et $B(r_2)$ sont deux cercles de rayon non nul, il existe toujours une similitude s de rapport non nul α telle que

$$s\,A(r_1) = B(r_2)$$



et $\alpha = \dfrac{r_2}{r_1}$

et $l(r_2) = \text{long } B(r_2) = \text{long } s\,A(r_1)$

$$= \alpha \text{ long } A(r_1)$$

$$= \alpha\, l(r_1)$$

$$= \frac{r_2}{r_1}\, l(r_1)$$

d'où $\dfrac{l(r_2)}{r_2} = \dfrac{l(r_1)}{r_1}$

Le rapport de la longueur des cercles de rayon non nul du plan euclidien est constant

cette constante est notée 2π

d'où $\forall r \in \mathbb{R}_0^+ \quad \dfrac{l(r)}{r} = 2\pi$

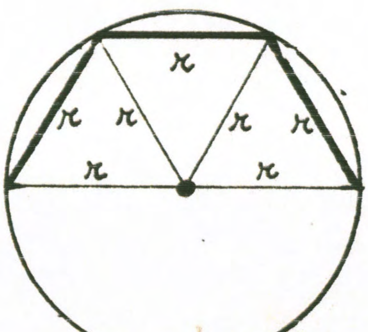
et ... $l(r) = 2\pi r$

en vertu d'un résultat précédemment acquis

$$2\pi r = l(r) < t(r) = 8r$$

$$\pi < 4$$

et...



$$3r < \frac{1}{2}\, l(r) = \pi r$$

$$3 < \pi < 4$$

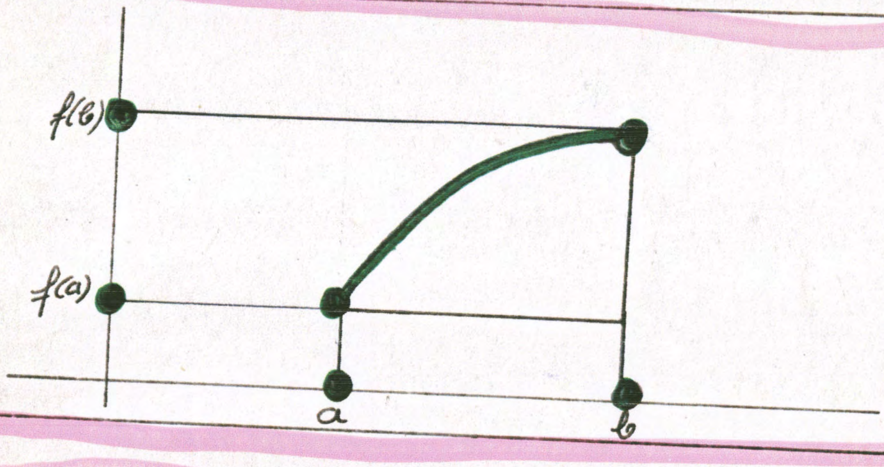
27. Longueur taximétrique (dans $\mathbf{R}^2$) de la fonction $[0\ 2\pi] \longrightarrow \mathbf{R}$: $x \longmapsto \sin x$.

Toute fonction monotone

$$f : [a\ b] \longrightarrow \mathbf{R}$$

est rectifiable et de Taxilongueur

$$|a-b| + |f(a) - f(b)|$$



Si A et B sont des parties d'un Monotrique M (ensemble ~~ordonné~~ muni de deux ordres totaux réciproques, doté d'une métrique compatible)

Si

$$A \cup B = M$$

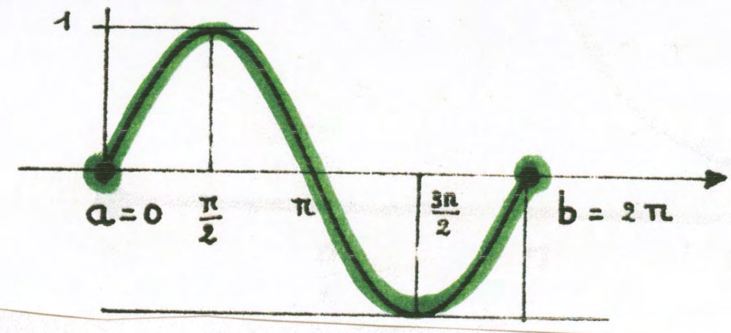
$$\operatorname{Max} A = \min B \quad \text{(pour l'un des ordres de } M\text{)}$$

Alors

$$\operatorname{long} M = \operatorname{long} A + \operatorname{long} B.$$

Taxilongueur d'un motif d'une sinusoïde $\sin x$

L



$\sin [0\ 2\pi]$ est un Arc de $\mathbb{R}^2$

$\sin [0\ 2\pi]$ est un monotrique.

$$\text{long } \sin_{[0\ 2\pi]} = \text{long } \sin[0\ 2\pi]$$

$$\sin[0\ 2\pi] = \sin[0\ \pi/2] \cup \sin[\pi/2\ \ 3\pi/2] \cup \sin[3\pi/2\ \ 2\pi]$$

$$\text{long } \sin_{[0\ 2\pi]} = \text{long} \sin[0\ \pi/2] + \text{long} \sin[\pi/2\ \ 3\pi/2] + \text{long } \sin[3\pi/2\ \ 2\pi]$$

$\sin : [0\ \pi/2] \to \mathbb{R}$ est monotone et de taxilongueur

$$|\pi/2 - 0| + |1 - 0| = \frac{\pi}{2} + 1$$

$\sin : [\pi/2\ \ 3\frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ est monotone et de taxilongueur

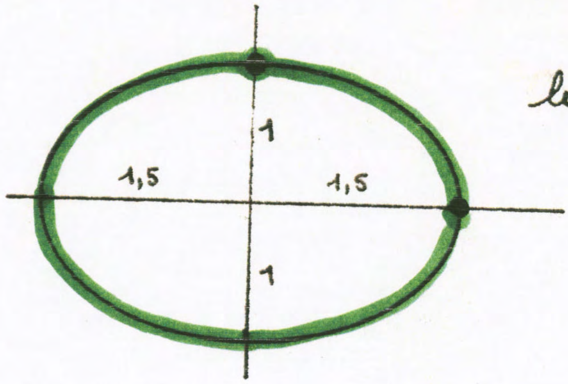
$$\pi + 2 = 2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$$

$\sin : [\frac{3\pi}{2}, 2\pi] \to \mathbb{R}$ est monotone et de taxilongueur

$$\frac{\pi}{2} + 1.$$

Taxilongueur de $\sin : [0\ 2\pi] \to \mathbb{R}$ égale $2(\pi + 2)$

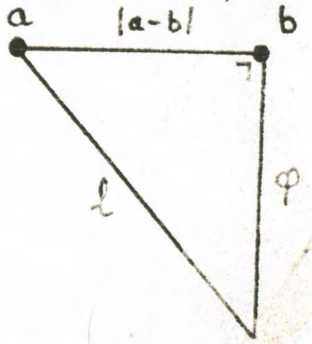
Taxi longueur d'une ellipse



$\text{long}_t \text{ ell} = (1 + 1{,}5) \cdot 4$
$= 2{,}5 \cdot 4$
$= 10$

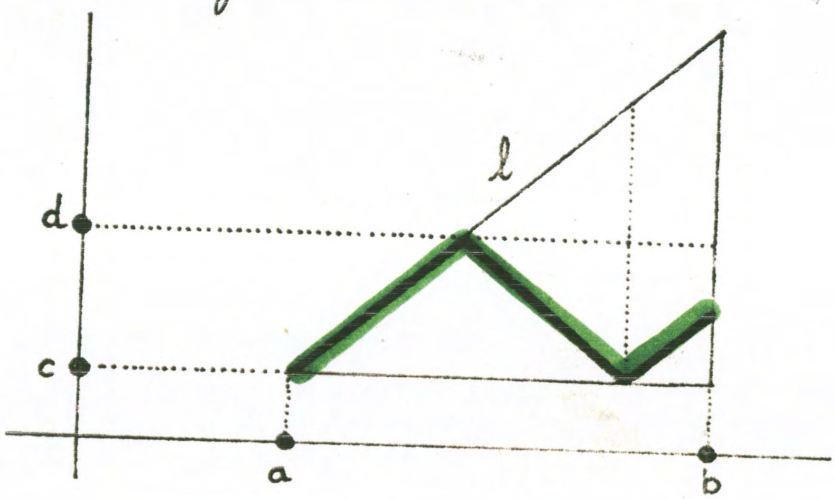
un peu de géométrie euclidienne :

Voici des réels a, b, c, d $\quad a \neq b \quad c \neq d$
Voici un réel l positif $\quad l > |a-b|$
On a



$\varphi = \sqrt{l^2 - |a-b|^2}$

$\forall l > |a-b|$
$\forall a, b, c, d$
il existe une fonction f de $[a\ b]$ dans $[c\ d]$
de longueur l



Arcs non rectifiables

$f_1 : [0 \ \tfrac{1}{2}] \longrightarrow [\tfrac{1}{2} \ \tfrac{1}{4}]$ continue de longueur > 1

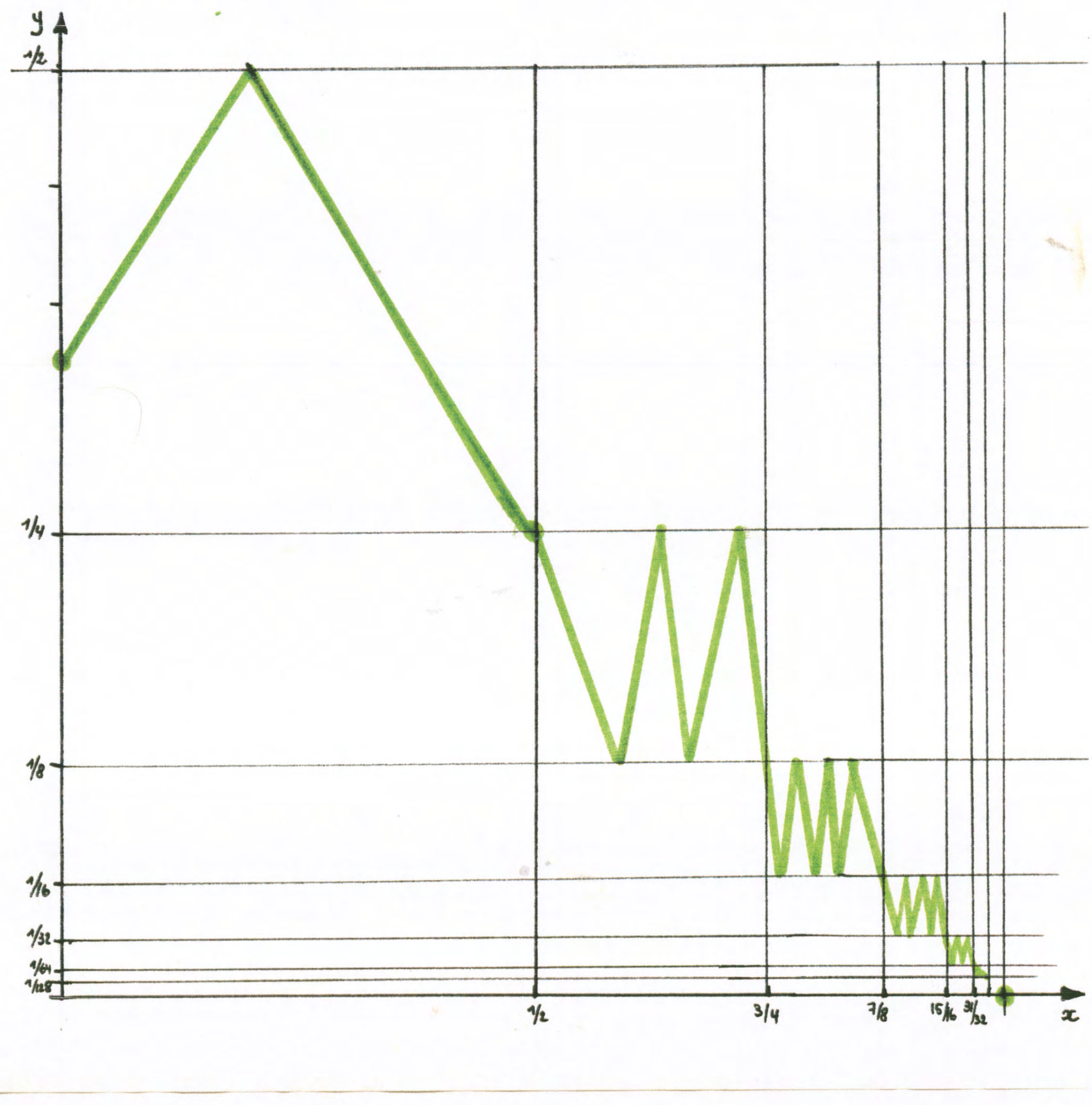
$f_2 : [\tfrac{1}{2} \ \tfrac{3}{4}] \longrightarrow [\tfrac{1}{4} \ \tfrac{1}{8}]$ continue de longueur > 1

$\vdots$

$f_j : [1-\frac{1}{2^{j-1}} \ \ 1-\frac{1}{2^j}] \longrightarrow [\frac{1}{2^{j-1}} \ \ \frac{1}{2^j}]$ continue de longueur > 1

$$f = \bigcup_{j \in \omega_0} f_j \ \cup \{(1,0)\}$$

est continue Non rectifiable de $[0 \ 1]$ dans $\mathbb{R}$



EX

Pour tout monotrique rectifiable $M, d, \leqslant$

$$\boxed{\tilde{d} \geqslant d} \qquad \boxed{\mathcal{T}_{\tilde{d}} \supset \mathcal{T}_d}$$

EX

La RECTIFICATION est une transformation de la classe des monotriques rectifia

$$M, \leqslant d \longmapsto M, \leqslant, \tilde{d}$$

EX

Pour tout monotrique rectifiable $M, \leqslant, d$:

$$\tilde{\tilde{d}} = \tilde{d}$$

EX

La RECTIFICATION est une transformation idempotente

(un monotrique rectifié ne peut pas être rectifié davantage)

EX

$M, \leqslant d$ est monotrique rectifié

ssi

$$d = \tilde{d}$$

ssi

$$\forall a, b \in M \quad \forall x \in [a, b] \quad : \quad d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)$$

EX

Toute partie P, du plan taximétrique $\mathbf{R}^2$, totalement ordonnée par l'ordre produit
$(\text{i.e. } \forall (a,b), (x,y) \in P \ : \ (a,b) \leqslant (x,y) \text{ ssi } (a \leqslant x \text{ et } b \leqslant y))$

est MONOTRIQUE TAXIRECTIFIÉ et donc MONOTRIQUE RECTIFIÉ pour la distance euclidienne.

EX

Trouve toutes les parties du plan taximétrique $\mathbf{R}^2$ qui sont

MONOTRIQUES TAXIRECTIFIÉES

(ce sont les trajets rectilignes pour un taximan)

= les géodésiques pour le taximan

Améliorer l'approximation $3 < \pi < 4$ par une visite à Scheefstad.

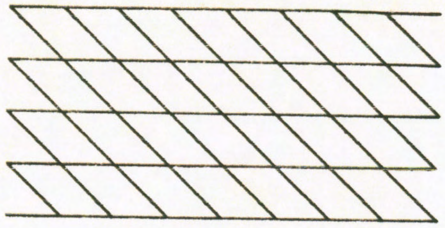


Fig. 22

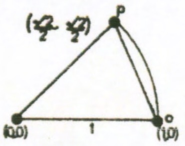


Fig. 23

$$e(o,p) < \frac{\pi}{8}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} < \frac{\pi}{8}$$

$$3{,}046 < \pi$$

La longueur euclidienne de l'arc $[op]$ égale à $\pi/8$ est majorée par sa longueur taximétrique Scheefstadoise qui égale $2(\sqrt{2} - 1)$.

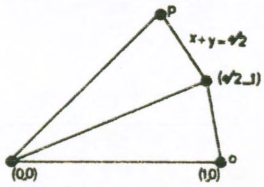


Fig. 24

D'où $\pi/8 < 2(\sqrt{2} - 1)$ et finalement $\pi < 3{,}32$.